מבחני התכנסות

ראשית, אבחנה פשוטה: טור מתכנס אם"ם (מכירים את הסימון?) זנבו מתכנס (לרשימה). מה הכוונה?

טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם"ם הטור $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ עבור $N>1$ כלשהו מתכנס. הסיבה פשוטה. נגדיר $b_n = a_{n-N+1}$, אזי הטור השני ניתן להיכתב כ- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. נגדיר S_n סדרת הסכומים החלקיים של הטור המקורי ו- σ_n סדרת הסכומים חלקיים של b_n. מתקיים $\sigma_n = S_{n+N} - S_N$. האיבר השני הוא קבוע, ולכן מחוקי גבולות של סדרות נובע שהסדרות S_n ו- σ_n מתכנסות ומתבדרות יחדיו (מכירים? לרשימה: לסדרה/טור/אינטגרל), ולכן הטורים מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

משפט (תכונות אלגבריות של טורים; לרשימה): יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים מתכנסים, ו- c קבוע אזי מתקיים:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty}(ca_n) = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

התכונות האלה, שראינו קודם שמתקיימות באופן טריוואלי לטורים סופיים, מתקיימות כעת בזכות משפטים שאתם מכירים לסדרות הסכומים החלקיים. באופן דומה ניתן להראות שמתקיים:

משפט: יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור מתכנס, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טור מתבדר, אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ מתבדר.

שימו לב שאם שני הטורים מתבדרים, יכול להיות עדיין שסכומם יתכנס.

דוגמה: $a_n = n$ הוא טור מתבדר (למה? התנאי ההכרחי). גם $b_n = -n$ הוא טור מתבדר. אבל הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$ מתכנס.

באופן דומה, סכום של שני טורים שמתבדרים לאינסוף, מתבדר אף הוא לאינסוף. כנ"ל למינוס אינסוף. מכפלה של טור שמתבדר לאינסוף בקבוע חיובי נותנת טור שמתבדר לאינסוף, בקבוע שלילי, נותנת טור שמתבדר למינוס אינסוף.

מבחני התכנסות לטורים חיוביים

ישנם קריטריונים להתכנסות טורים שניתן להפעיל רק במקרה שהטורים חיוביים. מצד שני, טורים לא חיוביים ניתן להשוות בכל מיני דרכים לטורים חיוביים. לכן צריך להכיר את הנושא של טורים חיוביים, ונתחיל כמובן מההגדרה:

הגדרה: טור שכל איבריו אי-שליליים ייקרא טור חיובי.
שימו לב שמותר שיהיו איברים ששווים לאפס בהגדרת טור חיובי. לפעמים קוראים לזה טור אי-שלילי כדי להדגיש.
אפשר כמובן גם להגדיר טור חיובי ממש. אבל אין צורך. האובייקט השימושי הוא מה שהגדרנו כעת כטור חיובי.
צריך רק, כרגיל, לשים לב שיש הסכמה על טרמינולוגיה כשקוראים בספר וכו'.

דוגמה: הטור $\sum_{n=0}^{\infty} n^2$ הוא טור חיובי. הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-1/2)^3}$ איננו טור חיובי (שימו לב לתחילת הסכימה).

לצורך ההגדרה בכלל ***לא חשוב שהטור הראשון מתבדר, ושהשני מתכנס***. אלה דברים שאנחנו מסתכלים עליהם אחרי שבדקנו אם הטור חיובי או לא.
שימו לב גם שטור שאיננו טור חיובי הוא ***לא "טור שלילי"*** (לא הגדרנו בכלל מושג כזה). למשל, בדוגמה השנייה יש רק איבר שלילי אחד. לבדיקת התכנסות אנחנו יכולים להתעלם ממנו, ולהסתכל הזנב שמהווה טור החיובי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1/2)^3}$. כמו שראינו שני הטורים מתכנסים ומתבדרים יחדיו ולכן נוכל להשתמש בקריטריונים שנכיר עבור טורים חיוביים גם לצורך הטור הזה שאיננו טור חיובי.
אם גם נצליח לסכום אחד מהטורים האלה, נדע גם את ערכו של השני, ששונה ממנו בשמינית.

משפטי ההתכנסות של טורים חיוביים מבוססים ברובם על משפטים שלמדתם באינפי' 1:
<u>משפט</u>: סדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת.
מה הרלוונטיות של המשפט הזה לעניין הטורים החיוביים?
הסדרה שאנחנו צריכים להסתכל עליה היא סדרת הסכומים החלקיים של הטור.
<u>טענה</u>: סדרת הסכומים החלקיים של טור חיובי היא סדרה מונוטונית עולה.
<u>הוכחה</u>: $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$. (פרס ההוכחה הקצרה בהיסטוריה של המתמטיקה...)

שימו לב שהסדרה לא חייבת להיות עולה ממש (זוכרים מה זה?), כי הגדרנו סדרה חיובית ככזו שמותר שאיבריה יתאפסו. זה לא משנה, כי המשפט שציטטנו מאינפי' 1 עוסק בסדרה מונוטונית במובן הרחב.

נכתוב כעת הכללה פשוטה למדי של המשפט שציטטנו לסדרות בשפה של טורים:

<u>משפט</u>: יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי, אזי הטור מתכנס אם"ם קיים קבוע $M > 0$ כך ש: $\forall n \in \mathbb{N}\ S_n < M$, ואם הוא לא מתכנס הוא מתבדר לאינסוף.
<u>הוכחה</u>: אם קיים כזה, אז סדרת הסכומים החלקיים חסומה, ולכן מתכנסת, ולכן הטור מתכנס מהגדרת התכנסות טור. אם לא קיים כזה, אז לכל M קיים N כך ש- $S_N > M$. כיוון שסדרת הסכומים החלקיים מונוטונית מתקיים גם $\forall n > N\ S_n > M$, ולכן הטור מתבדר לאינסוף.

זה בדיוק אותו סיפור כמו ההוכחה שסדרה מונוטונית בהכרח מתכנסת במובן הרחב.
שימו לב, הוכחנו בין השאר, ש<u>טור חיובי לא יכול "סתם" להתבדר אלא רק להתבדר לפלוס אינסוף</u>.

כעת, כדי למצוא קריטריונים להתכנסות של טורים חיוביים, כל מה שנשאר זה לחסום את הטור מלמעלה. ברור שהוא חסום מלמטה ע"י אפס.
לשם כך נשווה את הטור לגדלים אחרים.

<u>משפט (מבחן ההשוואה) (לרשימה)</u>: יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים חיוביים שאיבריהם מקיימים $\forall n\ a_n \leq b_n$, אזי: אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, ואם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר (כמובן שההתבדרויות הן לאינסוף).

<u>הוכחה</u>: נגדיר S_n סדרת הסכומים החלקיים של $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ו- $\tilde{S}_n$ סדרת הסכומים החלקיים של $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. מהנתון מתקיים $\forall n\ S_n \leq \tilde{S}_n$. אם קיים גבול סופי $\tilde{S}_n \to \tilde{S}$, אז כיוון ש- $\tilde{S}_n$ מונוטונית עולה מתקיים $\forall n\ \tilde{S}_n \leq \tilde{S}$, ולכן $\forall n\ S_n < \tilde{S}$.
הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חסום, ולכן מתכנס לפי המשפט הקודם. הוכחת החלק השני דומה.

אינטואיטיבית המשפט ברור: אם הטור הגדול יותר סופי, אז גם הקטן יותר סופי, ואם הקטן אינסופי, אז גם הגדול אינסופי.

<u>דוגמה</u>: נתון טור המוגדר ע"י $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. האם הטור מתכנס? האיבר הכללי שואף לאפס, אז לכאורה יש סיכוי, אבל הטור חיובי, ומתקיים $\forall n > 1\ a_n > \frac{1}{n}$. כיוון שהטור ההרמוני $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר, גם הטור הנוכחי מתבדר. שימו לב שאי-השוויון לא מתקיים לאיבר הראשון בטור, אבל זה לא מטריד אותנו, כי, כפי שכבר אמרנו, התכנסות הטור נקבעת ע"י זנבו. כאן "הזנב" כולל את כל איברי הטור מלבד הראשון.

<u>דוגמה</u>: נתון טור המוגדר ע"י $a_n = 2345\frac{\left|\cos(n^2 + e^{2\pi n^3})\right|}{2^n}$. המונה מאד מסובך, אבל הוא חיובי, וכך גם הטור, והמונה חסום ע"י 1. לכן מתקיים $a_n < \frac{2345}{2^n}$. זה טור הנדסי בתחום ההתכנסות שלו $q = \frac{1}{2}$, ולכן הטור המקורי מתכנס. כמובן שיהיה מסובך עד בלתי אפשרי לחשב לאיזה ערך בדיוק הוא מתכנס. מצד שני, הטור הזה מתכנס די מהר: מספיקים 100 איברים ראשונים כדי לקבל תוצאה נומרית בדיוק של 6 ספרות, ובד"כ זה יספיק לנו.

שאלות של קצב התכנסות הטור וכיצד ניתן לחשב נומרית טור מסובך שידוע שהוא מתכנס, יכולות לעניין אותנו ונגיד על זה עוד כמה מילים בהמשך, אבל בעקרון לומדים את הנושאים האלה בקורסים באנליזה נומרית.

במקרים מסוימים ניתן לנסח את מבחן ההשוואה באופן שונה. למעשה, ניתן לקבל ממנו קריטריון נוסף להתכנסות טורים, שאמנם חלש יותר ממנו, אבל יכול להיות שימושי:

<u>משפט ההשוואה הגבולי (לרשימה)</u>: יהיו $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ טורים חיוביים שאיבריהם מקיימים $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=L$, אזי:

1. אם $L=0$ והטור $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס, אז גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס, ואם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתבדר, אז גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתבדר.
2. אם $L=\infty$ והטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס, אז גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס, ואם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתבדר, אז גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתבדר.
3. אם $0<L<\infty$ אז שני הטורים <u>מתכנסים או מתבדרים יחדיו</u>.

שימו לב ש<u>במקרה הראשון הטור</u> $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ <u>הוא "הקטן" והטור</u> $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ <u>הוא "הגדול"</u>. זה מסביר את ההיגיון שבתנאי.

<u>המקרה השני זהה לראשון בהיפוך התפקידים של שני הטורים, וגם בהיפוך תואם של המסקנות</u>.

במקרה השלישי קיים גבול סופי, שאיננו אפס, ולכן ניתן לקחת $\varepsilon=L/2$ ויתקיים עבור N מסוים:

$\forall n>N\ \ \frac{L}{2}b_n<a_n<\frac{3L}{2}b_n$ (ברור למה?). מכיוון שמה שרלוונטי זה זנב הטור בלבד נבחן מה קורה ל- $n>N$,

ואז ניתן לחסום מלמעלה כל אחד משני הטורים ע"י קבוע כפול הטור השני (ברור למה?).

שימו לב שלא תמיד ניתן להשתמש במבחן הזה, כי <u>לא תמיד קיים גבול למנה</u>. סדרות הסכומים החלקיים הן מונוטוניות, אבל לא ידוע לנו שום דבר על מונוטוניות של סדרת המנות שהגדרנו, ובהחלט ייתכן שאין לה גבול גם במובן הרחב.

שימו לב שההוכחה הסתמכה למעשה על מבחן ההשוואה הרגיל, לכן בעקרון כל מה שניתן להוכיח באמצעות הקריטריון הזה ניתן להוכיח גם ע"י המבחן הרגיל, אבל לפעמים יותר קשה לראות זאת.

<u>דוגמה</u>: $a_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+\sin(n)}}$. הגיוני להשוות את הטור הזה לטור ההרמוני $b_n=\frac{1}{n}$. אבל בגלל הסינוס לא מתקיים שאחד גדול מהשני באופן עקבי. מצד שני, הסינוס חסום וקטן, ולכן ברור אינטואיטיבית שמשלב מסויים הוא יפסיק להיות חשוב לעניין ההתכנסות, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{n}{\sqrt{n^2+\sin(n)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\sin(n)/n^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\lim_{n\to\infty}\sin(n)/n^2}}=1$. ברור לכולם השלב האחרון בו הכנסנו את הגבול לתוך הפונקציה? אני מזכיר שתי תוצאות שלמדתם באינפי' 1:

1. <u>גבול של פונקציה רציפה של משתנה הוא ערך הפונקציה בערך של הגבול של הפרמטר</u>.
2. <u>אם קיים גבול לפונקציה שמזדהה בשלמים עם ערכי סדרה, אז זהו גם גבול הסדרה (ההפך לאו דוקא נכון)</u>.

ראינו בינתיים שאפשר להשוות טור חיובי לטור חיובי אחר כדי לקבל אינפורמציה על ההתכנסות או ההתבדרות שלו. למה עוד אפשר להשוות טור? לאינטגרל כמובן:

<u>משפט (מבחן האינטגרל) (לרשימה)</u>: יהי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ טור חיובי, ותהי $f(x)$ פונקציה מונוטונית יורדת (במובן החלש) המקיימת $f(n)=a_n$, אזי הטור והאינטגרל (הלא אמיתי) הנתון ע"י $\int_1^{\infty}f(x)dx$ מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

שימו לב שיכולות להיות הרבה פונקציות שמתאימות לסדרת איברי הטור בערכים השלמים שלהם. למשל, אנחנו יכולים תמיד להוסיף לכל פונקציה $c\sin(\pi n)$, עבור c קבוע כלשהו, ועדיין נקבל פונקציה עם התכונה של התאמה בשלמים. האם חשוב לנו איזו פונקציה אנחנו בוחרים? המשפט אומר שלא ממש, ובלבד שהיא <u>מונוטונית יורדת</u>.

שימו לב גם שמהמונוטוניות של הפונקציה והשוויון לאיברי הטור בשלמים מסיקים שהפונקציה חיובית. שימו לב גם שמכך שהפונקציה מונוטונית יורדת, ומהשוויון שלה לאיברי הטור בשלמים נובע ש<u>הסדרה</u> a_n היא

סדרה מונוטונית יורדת. כלומר המבחן הזה לא מתאים לסדרה חיובית כללית. כמובן שאם יש לנו סדרה מונוטונית יורדת ממקום מסוים, אז זה מספיק טוב, כי נבחן רק את זנב הטור וניתן גם להכליל את המבחן הזה למקרה של סדרה חיובית כללית יותר, אבל בד"כ לא עושים את זה. אחרי שנראה למה המשפט הזה מתקיים אני מקווה שההכללות תהיינה ברורות לכם גם בלי שנדבר עליהן.

במקום הוכחה פורמלית נתאר את הרעיון שמאחורי ההוכחה, ואתם מוזמנים לפרמל אותה. העניין הוא שכל טור ניתן לתיאור כאינטגרל (לא אמיתי) (לא נשתמש יותר בביטוי "לא אמיתי") של מלבנים ברוחב יחידה ובגובה איברי הטור (לצייר). זה נכון, אגב, לא רק לטורים חיוביים. כעת נצייר גם את הפונקציה שהזכרנו. אם המלבן שמתאר את האיבר הראשון של הטור נמצא בין 1 ל- 2, אז סדרת הסכומים החלקיים תהיה גדולה תמיד מהאינטגרל $S_n \ge \int_1^{n+1} f(x)dx$. מצד שני, אם המלבן נמצא בין 0 ל- 1 (לצייר), אז זנב הטור, שלא כולל את האיבר הראשון חסום מלמעלה ע"י האינטגרל $S_n - a_1 \le \int_1^n f(x)dx$. מהתנאי שכתבנו ברור שהפונקציה חיובית ממש, ולכן האינטגרל הלא אמיתי יכול או להתכנס לערך סופי או לאינסוף. מכיוון שסדרת הסכומים החלקיים חסומה על ידו גם מלמעלה, ברור שאם הוא מתכנס אז גם הטור מתכנס, וכיוון שהסדרה חסומה ע"י האינטגרל גם מלמטה, ברור שאם האינטגרל מתבדר לאינסוף, אז גם סדרת הסכומים החלקיים מתבדרת, כלומר הטור מתבדר.

יותר מזה, אנחנו רואים שיש לנו כאן שיטה להערכה נומרית של טור, לפחות למצוא חסמים עבורה.

דוגמה: נתון הטור ההרמוני המוכלל $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. האם הוא מתכנס או מתבדר ולמה בערך?

הזכרנו כבר שטור הרמוני מוכלל עם חזקה גדולה מאחד מתכנס וחזקה קטנה שווה אחד מתבדר, אבל טרם הוכחנו זאת. עכשיו אנחנו יכולים לתת לזה הוכחה כללית: האינטגרל $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^a}=\frac{1}{a-1}$ עבור $a>1$ ומתבדר עבור $a\le 1$, וזו ההוכחה שחיפשנו, לכל החזקות האפשריות, לא רק ל- 2.

מה לגבי הערכת סכום הטור? $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}=1$, ולכן $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\ge 1$, ומצד שני $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-1\le 1$, כלומר $1\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\le 2$. אנחנו יכולים די בקלות לשפר את ההערכה שלנו לסכום הטור ע"י סכימה מפורשת של, למשל, 3 איברים ראשונים שלו $S_3=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\simeq 1.3611$. כעת נשתמש בהכללה המיידית של המשפט, שניתן לראות בברור בציור, $\frac{1}{4}=\int_4^{\infty}\frac{dx}{x^2}\le\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n^2}\le\int_4^{\infty}\frac{dx}{x^2}+a_4=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}$. אם נחבר כעת לתוצאה הזו את S_3 נקבל את ההערכה $1.611<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<1.674$. אנחנו נלמד בהמשך איך לסכום את הטור הזה במדויק, ונקבל $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\simeq 1.6449$, מה שכמובן מתאים להערכה.

דוגמה: האם $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)}$ מתכנס?

פתרון: הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ מונוטונית יורדת, כי במכנה יש פונקציה מונוטונית עולה, והיא מזדהה אברי הטור.

לכן לפי המשפט הטור מתכנס אם"ם האינטגרל $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}$ מתכנס. כדי לחשב את האינטגרל נגדיר $u=\ln x$ ולכן $du=\frac{dx}{x}$ והאינטגרל המקורי נתון ע"י $\int_{\ln 2}^{\infty}\frac{du}{u}$. זה אינטגרל מתבדר ולכן הטור המקורי מתבדר.

עד כאן השווינו את הטור שמעניין אותנו לאינטגרל או לטור כללי אחר, אבל שני מבחנים מאד שימושיים מתקבלים מהשוואה לטור מאד ספציפי, הטור ההנדסי. נתאר את שני המבחנים החשובים האלה יחדיו:

מבחן השורש (קושי): נגדיר $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\equiv L$ (לרשימה).

מבחן המנה (ד'לאמבר): נגדיר $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\equiv L$ (לרשימה).

שימו לב שבמקרה של טור הנדסי שני הגבולות קיימים ומתקיים $L=q$, מנת הטור, כי,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_0q^n}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_0}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{q^n}=1\cdot q=q\ ,\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_0q^{n+1}}{a_0q^n}=\lim_{n\to\infty}q=q.$$

אנחנו מדברים כעת על טורים חיוביים, ובמקרה הזה הטור ההנדסי מתכנס אם"ם $0\le q<1$.

באופן דומה, עבור המבחנים החדשים, אם קיים הגבול של הקבוע L אז מתקיים:

1. אם $L<1$ הטור מתכנס
2. אם $L>1$ הטור מתבדר

למה? נסתכל על טור הנדסי שמנתו $q=\frac{L+1}{2}$, כלומר אמצע הדרך בין הטור שאותו בוחנים לבין 1. במקרה הראשון $q>L$, ומקיום הגבול אנחנו יודעים שממקום מסוים איברי הטור ההנדסי יהיו גדולים יותר מאיברי הטור אותו אנו בוחנים, ללא חשיבות לשאלה איזה $a_0>0$ בחרנו. ניתן להוכיח את זה באמצעות בחירת ε מתאים, כמו שעשינו בהוכחה של משפט ההשוואה הגבולי. אני אשאיר את זה לכם.
כעת, שימוש במשפט ההשוואה מראה שהטור שלנו מתכנס. במקרה השני מתקיים $1<q<L$, הטור ההנדסי אליו אנחנו משווים מתבדר, וממבחן ההשוואה גם הטור שלנו מתבדר. (<u>שאלות?</u>)

שימו לב ***לא להתבלבל בין המבחנים האלה לבין מבחן ההשוואה הגבולי***. גם בעניין הזה, לא חשוב כמה פעמים אומרים את זה, רואים בסוף טעויות במבחן. גם שם הגדרנו L אבל שם כל עוד הוא בתחום $L\in(0,\infty)$ שני הטורים המושווים מתנהגים באותה הצורה. ***כאן לעומת זאת יש אבחנה*** בין $L>1$ לבין $L<1$.

שימו לב ש<u>שני המבחנים לא אומרים לנו כלום במקרה שהגבול קיים ושווה לאחד, וגם לא במקרה שבו אין גבול</u>.
מה שכן, במקרים מסוימים ניתן להשתמש בהכללה שלהם:

אם מתקיים $\exists L<1,\exists N:\forall n>N,\frac{a_{n+1}}{a_n}<L$ (שימו לב שהעניין של N הוא העניין הרגיל של זנב של טור), אז הטור מתכנס, גם אם אין גבול לביטוי. באופן דומה אם $\exists L<1,\exists N:\forall n>N,\sqrt[n]{a_n}<L$.

ניתן כמובן לנסח גם כללים דומים למקרה של טורים מתבדרים, אבל במקרים שבהם $\sqrt[n]{a_n},\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ ממקום מסוים הטור לא מקיים את התנאי ההכרחי, ולכן ברור שהוא מתבדר גם ללא שום צורך במבחן נוסף.

בכל מקרה, בד"כ נשתמש במבחנים כפי שהם ולא בהכללות. בואו נראה דוגמאות לכך:

<u>דוגמה</u>: נתון $a_n=n^3 0.9^n$. האם הטור מתכנס? נבדוק ראשית עם מבחן המנה,

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^3 0.9^{n+1}}{n^3 0.9^n}=0.9\left(\frac{n+1}{n}\right)^3$. ניקח כעת גבול $0.9\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\right)^3=0.9<1$. כאן שוב השתמשנו במעבר מסדרות לפונקציות, וברציפות הפונקציה. קיבלנו גבול למנה שקטן מאחד, ולכן הטור מתכנס. נבדוק כעת באמצעות מבחן השורש $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3 0.9^n}=0.9\lim_{n\to\infty}n^{3/n}=0.9<1$. שוב, אותה התוצאה.

זה לא מקרה שהתוצאה זהה, כי שני המבחנים בעצמם מנסים לענות על השאלה "מהו הטור ההנדסי שהכי דומה לטור שיש לנו". אם קיים כזה טור ושני המבחנים מצליחים לזהות את זה, אז שניהם חייבים להפנות לאותו הטור. אגב, ברור איך חישבנו את הגבול? כדי לחשב אותו מחשבים את הגבול של הלוגריתם שלו, ואז הגבול של הביטוי עצמו מתקבל כי אקספוננט היא פונקציה רציפה. בכל מקרה, $\lim_{n\to\infty}\ln\left(n^{3/n}\right)=3\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=3\lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{1}=0$. בשלב האחרון שוב עברנו מסדרות לפונקציות, והשתמשנו בלופיטל. הביטוי המקורי הוא $e^0=1$ כמו שהצבנו קודם.

<u>דוגמה</u>: נתון הטור שמוגדר ע"י $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}=\{1,1,1/2,1/2,1/4,1/4,1/8,1/8,...\}$. האם הטור מתכנס? הטור נראה כמו ספירה כפולה של אברי הטור ההנדסי שסכומו 2 ולכן הגיוני לצפות שהוא מתכנס, ושסכומו 4. זה אפילו נכון, אבל ננסה לבדוק את ההתכנסות באמצעות המבחנים שלמדנו:

מבחן המנה נותן עבור n אי-זוגי $\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$ ועבור n זוגי $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$. לא קיים גבול במקרה הזה לכן אי אפשר להשתמש במבחן ואין לנו לכאורה מושג אם הטור מתכנס.

ננסה את המבחן השורש. במקומות <u>האי זוגיים</u> הביטוי לאיבר של הסדרה שמגדירה את הטור הוא $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}$

ובמקומות <u>הזוגיים</u>, $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}}$. כדי להשתמש במבחן השורש נחשב $\sqrt[n]{a_n}=a_n^{1/n}=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2n}} & n \text{ odd}\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-2}{2n}} & n \text{ even}\end{cases}$. רואים

שבכל מקרה קיים גבול $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1$, ולכן הטור מתכנס, כפי שציפינו.

המקרה הזה מדגים תוצאה כללית יותר: <u>מבחן השורש יותר כללי ממבחן המנה</u>. למעשה, בכל מקרה שבו מבחן המנה עובד גם מבחן השורש עובד, אבל לא להפך. אז למה בכלל צריך את מבחן המנה? יש מקרים שבהם מבחן השורש עובד באופן עקרוני, אבל די מסובך להראות את זה ואילו השימוש במבחן המנה אפשרי ופשוט, למשל, כשהסדרה שמגדירה את הטור מערבת ***עצרת*** של משהו. נראה מקרים כאלה בתרגול.

מבחני קושי וד'לאמבר שימושיים במיוחד במקרים של טורי פונקציות, כגון טורי חזקות. נבדוק מקרה כזה, שבו נתייחס למשתנה כאל פרמטר נתון:

<u>דוגמה</u>: נתון טור התלוי בפרמטר חיובי x, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$. עבור אילו ערכים (חיוביים) של x הטור מתכנס?

ניתן לפתור באמצעות כל אחד משני המבחנים. נתבונן במבחן השורש, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{x^n}{n^2}}=x\lim_{n\to\infty}n^{-2/n}=x$. שוב השתמשנו באותו הגבול כמו בתרגיל הקודם. ברור לנו כעת שעבור $0\le x<1$ הטור מתכנס ועבור $1<x$ הטור מתבדר. אנחנו לא יודעים עדיין להגיד כלום במקרה השלילי, כי אנחנו עדיין בטורים חיוביים. אבל גם למקרה החיובי אנחנו לא יודעים עדיין הכל, כי שני המבחנים האלה לא אומרים לנו כלום על המקרה בו מתקבל $L=1$. את הערך הספציפי של $x=1$ צריך לבדוק בדרך אחרת. אבל אז מתקבל הטור ההרמוני המוכלל עם חזקה 2, שהוכחנו כבר שהוא מתכנס, וגם הזכרנו שזה ל- $\pi^2/6$.

התכנסות בהחלט

עד עכשיו דיברנו בעיקר על טורים חיוביים. מה אנחנו יכולים לומר על <u>טורים שאינם בהכרח חיוביים</u>? אם יש רק מספר סופי של אברים שליליים, אז מסתכלים על זנב הטור, וזה המקרה החיובי. אם יש רק מספר סופי של אברים חיוביים, מסתכלים על הזנב של מינוס הטור. כלומר, המקרה החדש המעניין הוא רק זה שבו יש מספר אינסופי גם של אברים חיוביים וגם של שליליים.
את האפסים אפשר לספור גם ככאלה וגם ככאלה.

כשיש לנו טור שיש לו אינסוף אברים משני הסימנים אנחנו צריכים כלים חדשים. הערנו כבר שהכלים שיש לנו למקרה החיובי יהיו שימושיים גם למקרה הכללי. כדי לראות איך בדיוק זה קורה אנחנו צריכים הגדרה חדשה:

<u>הגדרה</u>: יהי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ טור. נאמר שהטור <u>מתכנס בהחלט</u> (<u>לרשימה</u>) אם הטור החיובי $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס.

שימו לב, קראנו לתכונה הזו "התכנסות בהחלט" וזה נשמע כאילו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס. אבל ההגדרה לא אומרת את זה. ההגדרה מדברת בכלל על ***התכנסות של טור אחר*** – טור הערכים המוחלטים.
<u>לטור חיובי (ממקום מסויים) ההגדרה של מתכנס בהחלט שקולה להגדרה של מתכנס</u>. לטור כללי, לאו דווקא.

דוגמה: נראה בהמשך שהטור ההרמוני בעל הסימנים המתחלפים $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...$ מתכנס ל- $\ln(2)$, אבל הוא בברור לא מתכנס בהחלט, כי טור הערכים המוחלטים הוא הטור ההרמוני, שהוכחנו כבר בשתי דרכים שונות (זוכרים איך?) שהוא מתבדר.

דוגמה: הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}$ מתכנס בהחלט, למשל לפי משפט המנה לטור הערכים המוחלטים. בקרוב נוכל לחשב שטור הערכים המוחלטים מתכנס ל- $\cosh(1)=\frac{e+e^{-1}}{2}\simeq 1.543$ (זוכרים פונקציות היפרבוליות?). גם הטור המקורי מתכנס, הפעם ל- $\cos 1 \simeq 0.540$ (ברדיאנים).

מסקנה: טור מתכנס שגם מתכנס בהחלט מתכנס בד"כ לערך שונה מזה של טור הערכים המוחלטים (שמגדיר את ההתכנסות בהחלט).
למעשה ברור שאלא אם כן הטור חיובי, הסכום של הטור שבו סופרים חלק מהאברים כשליליים יהיה קטן מזה שבו כולם נספרים כחיוביים.

הבנו שאין בהכרח קשר בין המושגים "מתכנס" ו"מתכנס בהחלט". אז למה בכל זאת בחרו את השם הזה? כי:

משפט (ללא הוכחה): טור מתכנס בהחלט, מתכנס.

ראינו כבר דוגמה של טור מתכנס שלא מתכנס בהחלט. המשפט אומר שההפך לא ייתכן, כלומר, התכונה של "התכנסות בהחלט" היא תכונה חזקה יותר מהתכנסות רגילה – יש גרירה לוגית לכיוון אחד.

מהדיון הזה אנחנו מבינים שיש טעם בהגדרה הבאה:

הגדרה: טור מתכנס שלא מתכנס בהחלט ייקרא מתכנס בתנאי (לרשימה).
למשל, הטור ההרמוני בעל הסימנים המתחלפים שראינו קודם, מתכנס בתנאי.

הגדרנו את המונחים של התכנסות בהחלט ובתנאי, אבל למה הם מעניינים אותנו? למה שיהיה אכפת לנו מטור הערכים המוחלטים אם יש לנו טור אחר?

אחד השימושים העיקריים בהתכנסות בהחלט הוא הגרירה מהתכנסות בהחלט להתכנסות רגילה. מכיוון שתכונת ההתכנסות בהחלט מדברת על תכונה של טור הערכים המוחלטים שהוא טור אי-שלילי ניתן להשתמש לבדיקתה בקריטריונים להתכנסות של טורים אי-שליליים. ספציפית, טורי חֲזָקוֹת, שמאד מעניינים אותנו בקורס הזה, כשהם מתכנסים, הם כמעט תמיד מתכנסים בהחלט.
השימוש הספציפי הזה לא מצדיק נתינת שם מיוחד לטור שמתכנס בתנאי, ונראה בקרוב שיש משהו מאד מעניין שאפשר להגיד על טורים כאלה. אבל קודם:

דוגמה: נתון טור התלוי בפרמטר ממשי כלשהו x, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$. עבור אילו ערכים של x הטור מתכנס?

פתרנו את הדוגמה הזו למקרה של טור חיובי, כלומר עבור $x\ge 0$. כעת נכליל לכל x. עבור $-1\le x\le 1$ אנחנו מקבלים שהטור מתכנס בהחלט ולכן מתכנס (ברור למה?). עבור $x<-1$ נחשב את הגודל שחישבנו במבחן המנה $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}n^2}{x^n(n+1)^2}=x$. אנחנו לא יכולים להשתמש במבחן המנה, כי הגדרנו אותו בינתיים לטורים חיוביים בלבד. אבל אנחנו כן יכולים לשים לב לכך שאם $x<-1$ אז (במקרה הכללי), כל עוד $a_n\ne 0$, כך שהכל מוגדר היטב, קיום הגבול מחייב שיתקיים $|a_{n+1}|>|a_n|$ לפחות ממקום מסוים, ולכן לא יכול להתקיים התנאי ההכרחי להתכנסות הטור, $a_n\to 0$.

כלומר, במקרה הנוכחי, הטור מתבדר עבור $x<-1$ בדיוק כשם שהוא מתבדר עבור $x>1$.

ממה שעשינו עכשיו מרגישים שיש דרך להכליל את מבחן המנה של ד'לאמבר למקרה של טורים כלליים. זו ודאי לא תהיה הפתעה גדולה אם נציין שגם מבחן השורש של קושי מוכלל לטורים כלליים. נציג את שניהם יחדיו:

משפט (מבחן-המנה - ד'לאמבר לטורים כלליים): נגדיר $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\equiv L$ (לרשימה).

<u>משפט (מבחן השורש – קושי לטורים כלליים)</u>: נגדיר $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\equiv L$ (<u>לרשימה</u>).

בשני המקרים:

1. אם $L<1$ הטור מתכנס
2. אם $L>1$ הטור מתבדר

<u>הוכחה</u>: אם $L<1$ אז טור הערכים החיוביים של הטור המקורי מתכנס <u>לפי מבחן המנה או השורש לטורים חיוביים</u>, כלומר הטור המקורי מתכנס בהחלט, ולכן, לפי משפט, מתכנס.

אם $L>1$ אז הסדרה $|a_n|$ לא מתכנסת לאפס, ולכן גם a_n לא מתכנסת לאפס, ולכן הטור מתבדר.

שימו לב שכמו במקרה של טורים חיוביים, <u>אם הגבול הוא 1, אז אין הכרעה</u>. באופן דומה, <u>אם לא קיים גבול אז אין הכרעה</u>.

שימו לב ששוב ישנה הכללה פשוטה של שני המשפטים. לא באמת חשוב לנו שקיים הגבול. הדבר היחיד שחשוב למטרת ***ההתכנסות*** זה שנוכל להשוות לטור ההנדסי, כלומר שיהיה קיים $q<1$ כך ש<u>ממקום מסוים מתקיים</u> $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<q$ או $\sqrt[n]{|a_n|}<q$ <u>ללא קשר לשאלה האם הסדרות האלה מתכנסות</u>. באופן דומה <u>התבדרות</u> נובעת כבר מכך ש<u>ממקום מסוים מתקיים</u> $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>1$ או $\sqrt[n]{|a_n|}>1$, שוב ללא קשר לשאלת קיום גבול לביטויים האלה.

<u>דוגמה</u>: נתון הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+3(-1)^n}{7^n}$. מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{7^n\left(2+3(-1)^{n+1}\right)}{7^{n+1}\left(2+3(-1)^n\right)}=\frac{1}{7}\cdot\begin{cases}-1/5 & n \text{ even}\\ -5 & n \text{ odd}\end{cases}$. הסדרה הזו בברור לא מתכנסת, ולכן מבחן המנה בניסוחו הפשוט לא עובד. ניתן להשתמש במבחן השורש, שכן עובד במקרה הזה. אבל ניתן גם להשתמש בהכללה של מבחן המנה: כיוון שמתקיים $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<\frac{6}{7}<1$, הטור מתכנס.

<u>דוגמה</u>: הטור שאבריו הם $\{1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{9},\frac{1}{8},\frac{1}{27}\dots\}$. הטור מורכב לסירוגין משני טורים הנדסיים (<u>ברור</u>? <u>להדגים</u>) חיוביים מתכנסים ולכן מתכנס. מצד שני, לא קיים גבול, לא במבחן המנה ולא במבחן השורש. במבחן המנה נקבל לסירוגין ערכים גדולים וקטנים מאחד, כך שאפילו בהכללה שלו אי אפשר להשתמש. במבחן השורש לעומת זאת נקבל לסירוגין שתי סדרות ששתיהן שואפות בנפרד ל- $1/\sqrt{2},1/\sqrt{3}$, ולכן ממקום מסוים הגודל שאנחנו מחשבים במבחן השורש חסום מלמעלה ע"י קבוע שקטן ממש מאחד, למשל $3/4$, ומכאן ניתן להסיק שהטור מתכנס.

שימו לב, הזכרנו כבר שלטורים חיוביים התבדרות שקולה להתכנסות במובן הרחב לאינסוף. אבל זה לא המקרה בטורים כלליים.

<u>דוגמה</u>: $\sum_{n=1}(-1)^{n-1}(2n-1)$ נותן, $S_n=(-1)^{n-1}n$, מקפץ בין התכנסות לאינסוף ולמינוס אינסוף. כלומר אין לו גבול אפילו במובן הרחב.

<u>דוגמה</u>: הטור $\sum_{n=1}(-1)^{n-1}$, שסדרת הסכומים החלקיים שלו מתנדנדת בין אחד ואפס, לא מתכנס בלי להתקרב בשום צורה לא לפלוס ולא למינוס אינסוף.

<u>דוגמה</u>: כל <u>טור שמכיל אינסוף אפסים</u>, בפרט הטור שכל אבריו הם אפס, <u>לא ניתן לבדיקה ע"י מבחן המנה אבל ניתן אולי לבדיקה ע"י מבחן השורש</u>. ההפך לא קורה. כל טור שמתכנס לפי מבחן המנה מתכנס גם לפי מבחן השורש. אבל ייתכן שהרבה יותר קשה לבדוק, ולכן שווה לנסות את שתי האפשרויות.